



O MÉTODO DO FIO AQUECIDO EM REGIME TRANSITÓRIO PARA A DETERMINAÇÃO DA CONDUTIBILIDADE TÉRMICA DE LÍQUIDOS ⁽¹⁾

ANTÓNIO FRANCO DE OLIVEIRA FALCÃO

Núcleo de Estudos de Engenharia Mecânica (I. A. C.)
Instituto Superior Técnico — Lisboa

Apresentam-se as bases teóricas do conhecido método do fio aquecido em regime transitório e analisa-se a influência das várias causas de erro: capacidade calorífica e condutibilidade térmica do fio, limitação das dimensões do sistema nas direcções axial e radial, radiação, convecção livre e resistência térmica na interface. Apresentam-se e comparam-se as realizações experimentais baseadas no método.

1 — INTRODUÇÃO

1.1 — *GENERALIDADES* — Nas últimas dezenas de anos, os estudos da transmissão de calor têm tido um grande desenvolvimento para a resolução de problemas cada vez mais numerosos e complexos em quase todos os campos da engenharia. Este facto originou a necessidade de conhecer com a maior precisão, para um grande número de materiais, as propriedades físicas que intervêm nos fenómenos de transmissão de calor. De todas estas propriedades, a condutibilidade térmica, se, por um lado, é aquela que está mais directamente relacionada com a transferência de calor por condução e convecção, por outro lado, é também aquela cuja determinação experimental apresenta maiores dificuldades, especialmente para o caso dos fluidos. Na generalidade, os métodos utilizados para a determinação experimental da condutibilidade térmica têm como base teórica a equação da condução de calor de Fourier, válida para meios homogêneos, isotropos e com condutibilidade térmica independente da temperatura:

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

1.2 — *MÉTODOS DE REGIME ESTACIONÁRIO* ⁽²⁾ — No caso dos métodos estacionários, a temperatura não varia com o tempo e a equação 1 reduz-se a

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2)$$

não se tornando necessário conhecer a massa específica ρ e o calor específico c , que figuram em $\alpha = k/\rho c$.

Na prática, os aparelhos são idealizados de modo a que se obtenham para a equação 2 condições aos limites simples e facilmente realizáveis. Nos modelos físicos utilizados para o estudo de líquidos, o meio tem a forma duma película limitada por duas superfícies isotérmicas e com fluxo de calor uniforme, em geral planos paralelos, superfícies cilíndricas co-axiais ou superfícies esféricas concêntricas. A medição da diferença de temperatura ΔT entre as superfícies e do fluxo de calor $q = k \partial T / \partial n$ que as atravessa, junta-

(1) Neste artigo apresentam-se os fundamentos teóricos dum trabalho cuja parte experimental será publicada posteriormente.

(2) Em trabalhos recentes, TAIT e HILLS (1) e McLAUGHLIN (2) apresentam e comparam os vários métodos para a determinação experimental da condutibilidade térmica de líquidos.

mente com o conhecimento da solução da equação 2 para a forma geométrica adoptada, bastam para determinar a condutibilidade térmica k .

A necessidade de evitar a convecção livre impõe que a diferença de temperatura e a distância entre as paredes tenham valores muito pequenos. Esta circunstância exige que a fabricação, a montagem e o *contrôle* do aparelho sejam extremamente rigorosos e delicados, para garantir um bom alinhamento das superfícies. A estes problemas há que acrescentar a dificuldade em medir rigorosamente a diferença de temperatura entre as paredes e em manter uma boa estacionaridade térmica, o que, dada a massa considerável do sistema, só se consegue ao fim dum tempo relativamente longo. Os efeitos das extremidades provocam distorções do campo da temperatura e constituem também uma fonte de erros.

1.3—MÉTODOS DE REGIME TRANSITÓRIO—Para evitar ou reduzir algumas destas dificuldades e inconvenientes, surgiram métodos que utilizam o aquecimento em regime não permanente. A equação da condução do calor 1 aplicada ao meio é integrada, obedecendo a condições aos limites convenientemente escolhidas. Entrando nela com o valor do fluxo de calor na parede e com o valor da temperatura num ponto do meio (em geral a temperatura da própria parede), medidos em função do tempo, é possível determinar a condutibilidade térmica. O tempo de ensaio é suficientemente curto para que não surjam perturbações no fenómeno de condução de calor, devidas ao aparecimento de convecção livre.

A principal dificuldade na aplicação destes métodos consiste na medição de grandezas — fluxo de calor e temperatura — que variam com o tempo.

Embora, teoricamente, para a determinação de k seja necessário conhecer previamente os valores de c e ρ que figuram em α , como se conclui da equação 1, na prática utilizam-se soluções aproximadas da equação diferencial, que dispensam esse conhecimento, como veremos adiante.

2 — FUNDAMENTOS DO MÉTODO DO FIO AQUECIDO EM REGIME TRANSITÓRIO

2.1 — MODELO FÍSICO — Para a aplicação do princípio que acabámos de expor nas suas linhas gerais, o fio aquecido é o modelo físico mais simples e de mais

fácil realização experimental e foi, por isso, adoptado para a quase totalidade dos dispositivos experimentais conhecidos.

Um fio com forma cilíndrica de revolução, com raio e comprimento infinito, está mergulhado num meio — o líquido a estudar —, que é considerado ilimitado em todos os sentidos. Admite-se que os meios são homogêneos e isótropos e que as suas propriedades físicas não variam no intervalo de temperatura que interessa considerar. Inicialmente o fio e o meio envolvente estão a uma temperatura uniforme θ_0 e, a partir do instante $t = 0$, liberta-se no fio uma quantidade de calor constante Q por unidade de tempo e por unidade de comprimento.

A solução da equação da condução do calor 1 para este caso, apresentada por CARSLAW e JAEGER (3-a), com a forma duma série rapidamente convergente para valores elevados de τ , permite calcular a elevação da temperatura do fio $T(t) = \theta(t) - \theta_0$ em função do tempo:

$$T(t) = \frac{Q}{4\pi k} \left\{ \ln \frac{4\tau}{c} + \frac{1}{2\tau} \left[1 + \left(1 - \frac{\rho_1 c_1}{\rho c} \right) \ln \frac{4\tau}{C} \right] + \dots \right\} \quad (3)$$

em que $\tau = \alpha t/a^2$ é o número de Fourier, k , α , ρ , c são as propriedades físicas do meio envolvente e ρ_1 e c_1 são as propriedades físicas do material do fio. Admite-se que o fio é um condutor térmico perfeito $k_1 = \infty$. A constante C vale $C = 1,78811\dots = e^\gamma$, sendo $\gamma = 0,5772\dots$ a constante de Euler.

Na equação 3 todos os termos, com excepção do primeiro, tendem para zero quando t aumenta e podem desprezar-se a partir dum valor de t que depende do grau de aproximação requerido e das características físicas e geométricas do sistema, ficando, aproximadamente:

$$T(t) \simeq \frac{Q}{4\pi k} \ln \frac{4\tau}{C} = \frac{Q}{4\pi k} \left(\ln t + \ln \frac{4\alpha}{a^2} - \gamma \right) \quad (4)$$

donde se conclui que a curva de T em função de $\ln t$ tende assintoticamente para uma recta de inclinação $i = Q/4\pi k$ e ainda que, para valores elevados de $\tau = \alpha t/a^2$, as propriedades físicas c_1 e ρ_1 do material do fio têm pouca influência sobre a sua temperatura.

Se supusermos o fio simplesmente como uma fonte linear, com uma libertação de calor Q por unidade de comprimento e por unidade de tempo, a elevação de temperatura num ponto à distância r da fonte é dada por (3-b):

$$T(t, r) = -\frac{Q}{4\pi k} Ei\left(-\frac{r^2}{4\alpha t}\right) \quad (5)$$

em que $-Ei(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$ é a função integral exponencial.

Utilizando o desenvolvimento em série desta função para valores pequenos de x :

$$Ei(-x) = \gamma + \ln x - x + \frac{1}{4}x^2 + \dots$$

e, tomando apenas os dois primeiros termos, obtemos a expressão:

$$T(r, t) \simeq \frac{Q}{4\pi k} \left(\ln \frac{4\alpha t}{r^2} - \gamma \right) \quad (6)$$

aplicável para valores elevados de $\frac{4\alpha t}{r^2}$.

Se na equação 6 fizermos $r = a$, obtemos a expressão aproximada 4 atrás deduzida.

2.2—UTILIZAÇÃO DO FIO PARA A DETERMINAÇÃO DE k —A equação 4 constitui o fundamento teórico dos métodos para a determinação da condutibilidade térmica k por aquecimento de um fio em regime não permanente. Num fio metálico de pequeno diâmetro, mergulhado no meio a estudar, liberta-se, a partir do instante $t = 0$, a quantidade de calor constante Q , devido à passagem duma corrente eléctrica. Desde que se meçam a temperatura $T(t)$ do fio em função do tempo e a quantidade de calor constante Q , a condutibilidade térmica k é determinada a partir do coeficiente angular da curva de $T(t)$ em função de $\ln t$, na região em que se possa considerar como recta.

3 — ERROS SISTEMÁTICOS INERENTES AO MÉTODO

Conforme o dispositivo experimental construído se aproximar mais ou menos do modelo teórico atrás apresentado, assim se cometerão erros maiores ou menores.

3.1 — INFLUÊNCIA DOS RESTANTES TERMOS DA SÉRIE DA EQUAÇÃO 3—Ao tomarmos na equação 4 apenas o primeiro termo da solução completa 3 da equação diferencial, cometemos um erro correspondente à soma dos restantes termos da série. Não entrando em consideração com os termos que não figuram explicitamente em 3 e cuja soma tem a ordem de grandeza de $Q/4\pi k\tau^2$, a relação entre o segundo e o primeiro termos do segundo membro de 3 dá o erro relativo de $T(t)$ cometido, que é apenas função do número de Fourier τ e da relação entre as capacidades caloríficas por unidade de volume $\rho_1 c_1/\rho c$.

No entanto, tem mais interesse estudar o erro introduzido na inclinação da curva de T em função de $\ln t$. Derivando a equação 3, obtém-se:

$$\frac{4\pi k}{Q} \frac{dT}{d(\ln t)} = 1 - \frac{1}{2\tau} \left[1 + \left(1 - \frac{\rho_1 c_1}{\rho c} \right) \left(\ln \frac{4\tau}{C} - 1 \right) \right] + \dots \quad (7)$$

O valor do segundo termo desta série está representado na fig. 1 em função de τ , para vários valores de $\rho_1 c_1/\rho c$:

$$e_1 = \frac{1}{2\tau} \left[1 + \left(1 - \frac{\rho_1 c_1}{\rho c} \right) \left(\ln \frac{4\tau}{C} - 1 \right) \right] \quad (7a)$$

Note-se que e_1 pode ser positivo ou negativo, conforme os valores de τ e de $\rho_1 c_1/\rho c$.

3.2 — INFLUÊNCIA DA CONDUTIBILIDADE TÉRMICA FINITA DO MATERIAL DO FIO—As equações 3 e 4 foram deduzidas admitindo-se que era infinita a condutibilidade térmica k_1 do material do fio. Na realidade isto não sucede, pelo que a temperatura no interior do fio depende não só do tempo, mas também da distância r ao eixo. Como em geral é $k_1 \gg k$, a temperatura do fio em função do raio não se afasta sensivelmente da temperatura T_r que se verificaria em regime permanente, ou seja, tem uma distribuição do tipo parabólico (3-c):

$$T_r = T_o - \frac{Q}{\pi a^2} \frac{r^2}{4k_1} = T_a + \frac{Q}{4\pi k_1} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad r \ll a \quad (8)$$

em que T_o e T_a são as temperaturas respectivamente no eixo e na superfície do fio e $Q/\pi a^2$ é a quantidade de calor libertada uniformemente por unidade de volume.

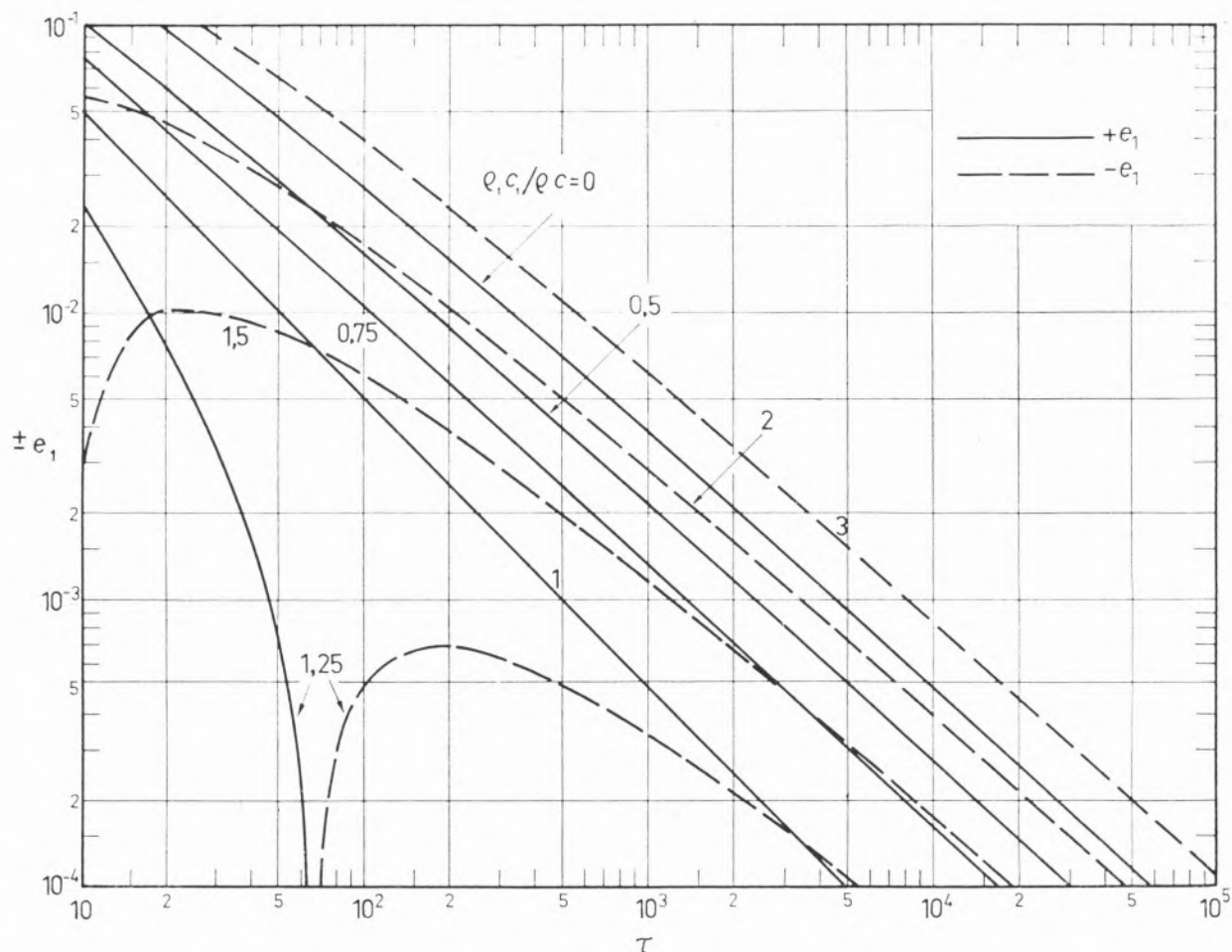


Fig. 1 — Erro relativo e_1 devido à condutibilidade térmica finita do material do fio.

A temperatura média em toda a secção recta do fio é:

$$T_m = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a T_r 2\pi r dr = T_a + \frac{Q}{8\pi k_1} \quad (9)$$

Substituindo T_a por $T(t)$ dado pela equação 4, teremos:

$$T_m(t) = \frac{Q}{4\pi k} \left[\ln \frac{4\tau}{C} + \frac{k}{2k_1} \right] \quad (10)$$

ou seja, a influência de k_1 finito em $T_m(t)$ traduz-se pelo aparecimento dum termo aditivo constante, que não afecta a inclinação da curva de $T_m(t)$ em função $\ln t$.

3.3 — INFLUÊNCIA DA LIMITAÇÃO DAS DIMENSÕES NAS DIRECÇÕES RADIAIS — Supomos que o fio está contido num recipiente cilíndrico com diâmetro $2R$ e colocado segundo o eixo do cilindro. O facto de o meio ser limitado radialmente introduz na subida de temperatura que teria o fio num meio infinito uma alteração que depende, evidentemente, das propriedades físicas do recipiente e do meio que rodeia este. Os casos ex-

tremos seriam uma parede com temperatura constante: $T(R, t) = 0$ — caso estudado por FISCHER (4) — e uma parede impermeável ao calor: $[\partial T(r, t)/\partial r] = 0$, para $r = R$. Estes casos seriam realizados, aproximadamente, na prática, por um recipiente metálico de paredes muito espessas e por um recipiente de Dewar. No caso geral, a ordem de grandeza da influência da parede pode ser avaliada comparando a elevação de temperatura $T(R, t)$, que existiria num ponto $r = R$ no líquido suposto infinito, com a subida de temperatura $T(t)$ do fio, pois o efeito, na temperatura do fio, da onda de calor reflectida na parede será inferior, em módulo, ao valor da temperatura $T(R, t)$. Supondo, para o cálculo de $T(R, t)$, o fio como uma fonte linear, podemos aplicar a equação 5:

$$\begin{aligned} T(R, t) &= -\frac{Q}{4\pi k} Ei\left(-\frac{R^2}{4\alpha t}\right) = \\ &= -\frac{Q}{4\pi k} Ei\left(-\frac{R^2}{4a^2} \frac{1}{\tau}\right) \end{aligned}$$

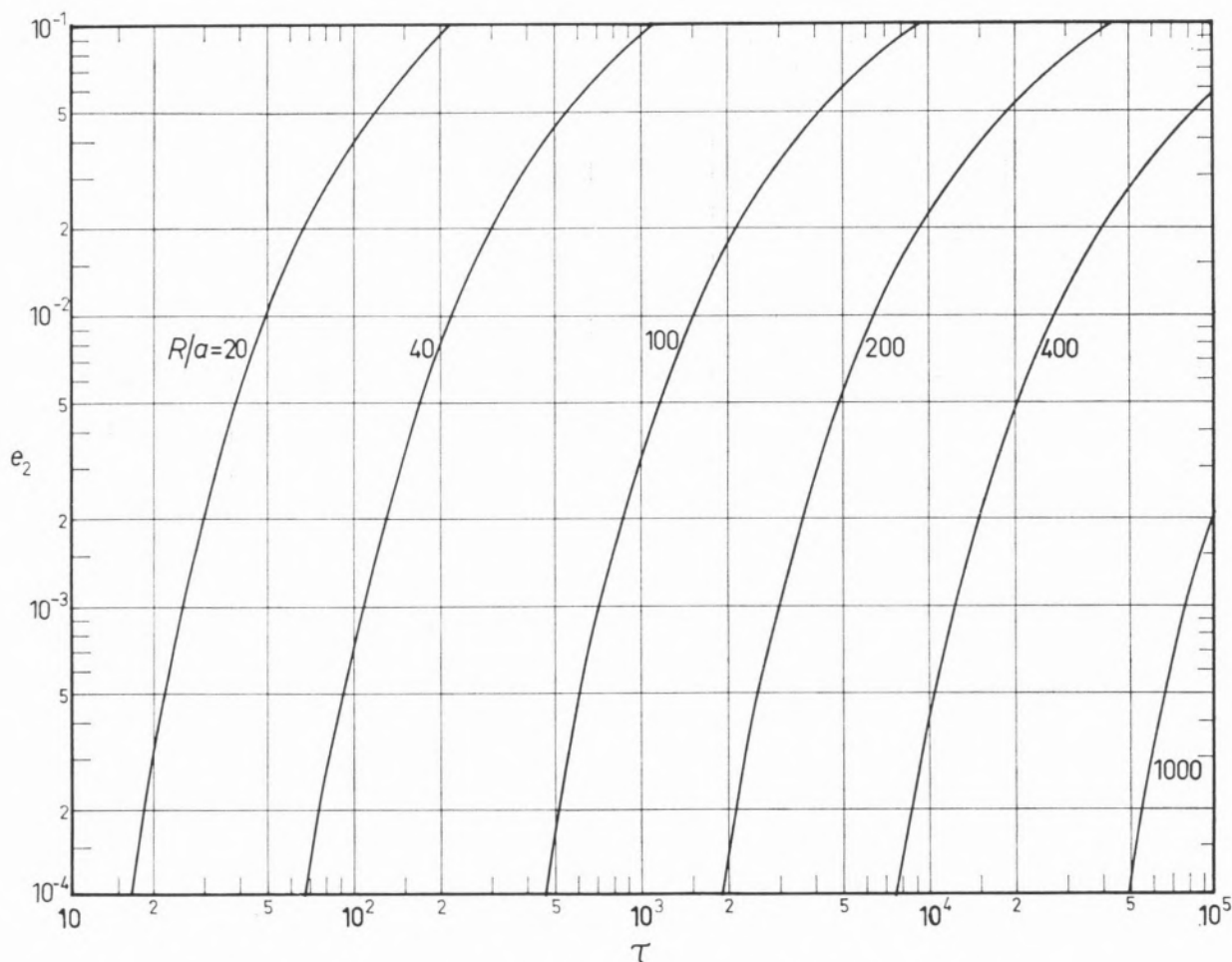


Fig. 2 — Erro relativo e_2 devido à limitação das dimensões nas direcções radiais.

Entrando com o valor de $T(t)$ dado por (4), obtemos a relação

$$e_2 = \frac{-Ei\left(-\frac{R^2}{4a^2} \frac{1}{\tau}\right)}{\ln \frac{4\tau}{C}} \quad (11)$$

representada graficamente na fig. 2 em função de τ para vários valores de R/a .

3.4 — INFLUÊNCIA DO COMPRIMENTO FINITO DO FIO

O facto de o fio ter um comprimento finito vai introduzir uma alteração na sua temperatura, que, neste caso, será função não só do tempo, mas também da coordenada axial z . Esta influência é devida a duas causas, que, por razões de simplicidade, analisaremos separadamente.

3.4.1 — Se o fio tem um comprimento finito L , nas extremidades, ou seja, para $z = \pm L/2$, verifica-se uma

descontinuidade na quantidade de calor libertado, que passa de Q a zero. Como consequência, há uma distorção no campo das temperaturas, mais acentuado junto às extremidades, e a temperatura do meio envolvente e a do fio são funções também de z . A análise matemática deste caso é apresentada no apêndice A, em que se supõe que o meio envolvente é infinito em todas as direcções. (BLACKWELL (5) estudou um caso mais desfavorável, em que considera o meio envolvente limitado por dois planos perpendiculares ao eixo do fio nas suas extremidades e nos quais a temperatura se mantém constante). A inclinação da curva da temperatura do fio $T_L(t, z)$ em função de $\ln t$ é dada, para valores elevados de τ (que são os que nos interessam), por A 3:

$$i_L(t, z) = \frac{Q}{8\pi k} \left[\operatorname{erf} \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{4\alpha t}} + \operatorname{erf} \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{4\alpha t}} \right] \quad (12)$$

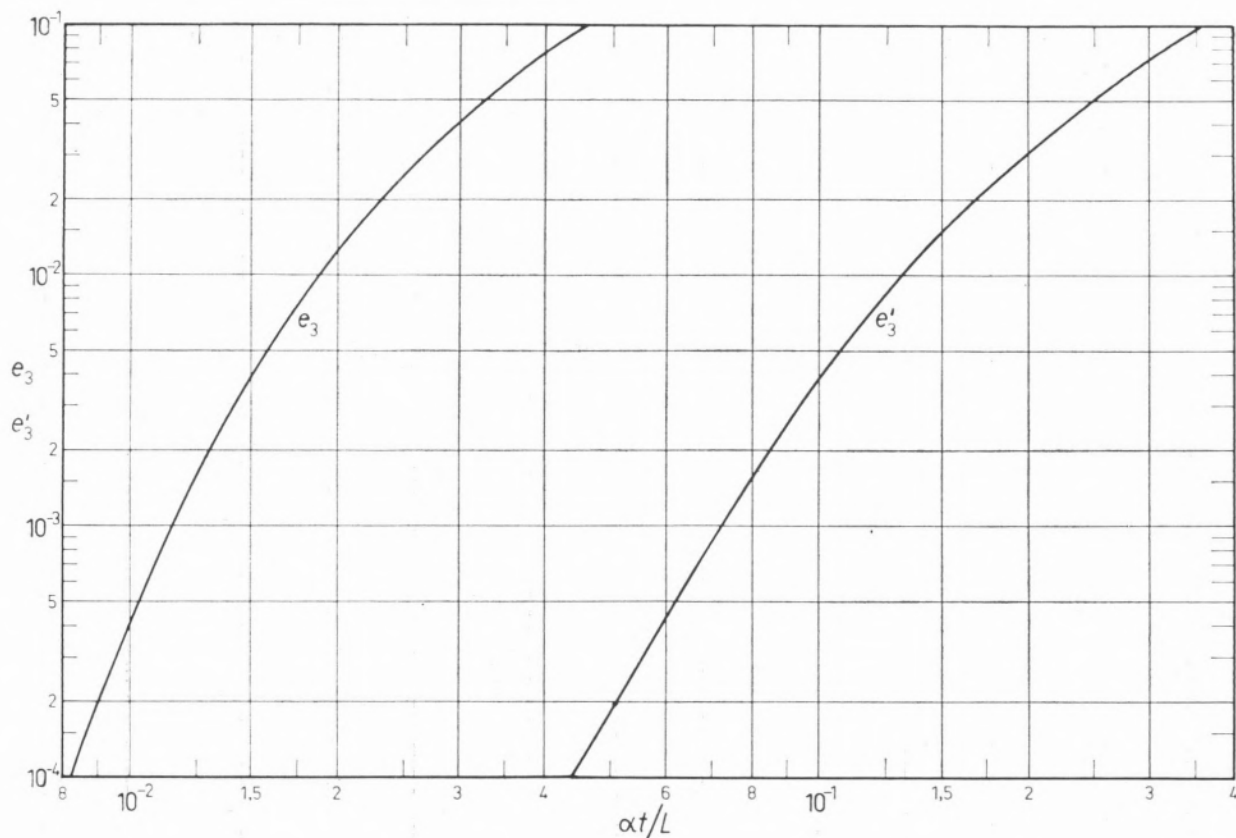


Fig. 3 — Erros relativos e_3 e e'_3 devidos ao comprimento finito do fio.

No ponto médio $z = 0$ do fio teremos

$$i_L(t, 0) = \frac{Q}{4\pi k} \operatorname{erf} \frac{L}{4\sqrt{\alpha t}} \quad (13)$$

O valor médio de $i_L(t, z)$ ao longo de todo o comprimento do fio é dado por A4:

$$i_L(t) = \frac{Q}{4\pi k} \left[1 - \frac{\sqrt{4\alpha t}}{L} \operatorname{ierfc} \frac{L}{\sqrt{4\alpha t}} \right] \quad (14)$$

Os erros relativos correspondentes às equações 13 e 14 são dados por:

$$e_3 = \operatorname{erfc} \frac{L}{4\sqrt{\alpha t}} \quad (13-a)$$

$$e'_3 = \frac{\sqrt{4\alpha t}}{L} \operatorname{ierfc} \frac{L}{\sqrt{4\alpha t}} \quad (14-a)$$

Na fig. 3 estão representados graficamente e_3 e e'_3 em função de $\alpha t/L^2$.

3.4.2—A segunda consequência do facto de o fio ter um comprimento finito é uma perda de calor para os condutores metálicos de ligação ao exterior, devida

a condução de calor ao longo do fio. A análise matemática deste fenómeno está apresentada no apêndice B. Considerando nula a elevação de temperatura nas extremidades do fio $z = \pm L/2$ — que é o caso mais desfavorável — a variação da temperatura ao longo do fio é dada por B6:

$$T_L(t, z) = T(t) \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{2z}{L} u}{\operatorname{ch} u} \right] \quad (15)$$

em que $T(t)$ é a temperatura do fio de comprimento infinito e u é dado por B7:

$$u = \frac{L}{a} \sqrt{\frac{k}{k_1}} \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{4\tau}{C}}} \quad (16)$$

sendo k_1 a condutibilidade térmica do material do fio.

No ponto médio do fio $z = 0$ tem-se:

$$T_L(t, 0) = T(t) \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch} u} \right] \quad (17)$$

O valor médio da temperatura ao longo de todo o comprimento do fio é dado por B8:

$$T_L(t) = T(t) \left[1 - \frac{th u}{u} \right] \quad (18)$$

Se quisermos conhecer a inclinação das curvas de $T_L(t, 0)$ e de $T_L(t)$ em função de $\ln t$, não temos mais do que derivar as equações 17 e 18 em ordem a $\ln t$ e obtemos:

$$i'_L(t, 0) = \frac{d T_L(t, 0)}{d (\ln t)} = \frac{Q}{4 \pi k} \left[1 - \frac{1}{ch u} \left(1 + \frac{th u}{2u} \right) \right] \quad (19)$$

e

$$i'_L(t) = \frac{d T_L(t)}{d (\ln t)} = \frac{Q}{4 \pi k} \left[1 - \left(\frac{3}{2} \frac{th u}{u} - \frac{1}{ch^2 u} \right) \right] \quad (20)$$

Os segundos termos dentro dos parêntesis rectos das equações 19 e 20 representam os erros relativos correspondentes, devidos a perdas de calor por condução ao longo do fio:

$$e_4 = \frac{1}{ch u} \left(1 + \frac{th u}{2u} \right) \quad (19-a)$$

$$e'_4 = \frac{3}{2} \frac{th u}{u} - \frac{1}{ch^2 u} \quad (20-a)$$

Para valores de e_4 e e'_4 inferiores a 0,1, as expressões 19-a e 20-a podem ser substituídas, com boa aproximação, por:

$$e_4 \simeq e^{-u} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{u} \right) \quad (19-b)$$

$$e'_4 \simeq \frac{3u}{2} \quad (20-b)$$

3.5—*PERDAS DE CALOR POR RADIAÇÃO*—A hipótese mais desfavorável consiste em supor que a transmissibilidade do meio envolvente é 1 (perfeitamente transparente às radiações térmicas). Considerando que a superfície do fio é muito pequena comparada com a superfície interior do recipiente, a quantidade de calor perdida por radiação pelo fio, por unidade de superfície e por unidade de tempo, é dada por (6):

$$q_r = \varepsilon \sigma [(\theta_o + T)^4 - \theta_o^4]$$

em que θ_o e $(\theta_o + T)$ são, respectivamente, as temperaturas absolutas das paredes interiores do recipiente e da superfície do fio, σ é a constante de Stefan-Boltzmann $\sigma = 5,775 \cdot 10^{-12} \text{ watt} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}$ e ε é a emissividade total da superfície do fio. A quantidade de calor perdida por unidade de comprimento do fio e por unidade de tempo será:

$$Q_r = 2 \pi a \varepsilon \sigma [(\theta_o + T)^4 - \theta_o^4]$$

e, atendendo a que $T \ll \theta$, virá, aproximadamente:

$$Q_r \simeq 8 \pi a \varepsilon \sigma \theta_o^3 T \quad (21)$$

Comparando Q_r com a quantidade de calor Q dada por 4, teremos:

$$e_5 = \frac{Q_r}{Q} = \frac{2 a \varepsilon \sigma \theta_o^3}{k} \ln \frac{4\tau}{C} \quad (22)$$

Esta quantidade é, em geral, desprezável, para as temperaturas θ a que se realizam os ensaios.

3.6—*INFLUÊNCIA DA CONVECÇÃO LIVRE*—O aparecimento da convecção livre constitui uma das maiores dificuldades na determinação da condutibilidade térmica de fluidos, pois sobrepõe-se ao processo da condução e intensifica a transmissão de calor, deixando de ser válida a aplicação das expressões deduzidas a partir da equação da condução de calor.

No estudo da transmissão de calor em espaços fechados e em regime permanente, verificou-se que não se manifesta convecção livre quando o número de Rayleigh é inferior a um valor crítico, que depende da geometria do sistema (7). No caso de espaços anulares, esse valor crítico é, aproximadamente, 10^3 , sendo o número de Rayleigh definido em função da diferença $(R_e - R_i)$ entre os raios exterior e interior (8):

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T (R_e - R_i)^3}{\nu \alpha} \quad (23)$$

em que β é o coeficiente de dilatação térmica, ν a viscosidade cinemática e ΔT a diferença entre as temperaturas das duas paredes.

No nosso caso o problema é mais complicado, pois o aquecimento realiza-se em regime não permanente. VAN DER HELD e VAN DRUNEN (9) procuraram aplicar as conclusões obtidas para o regime permanente fazendo corresponder ao aquecimento do fio em regime transitório um espaço anular em regime permanente,

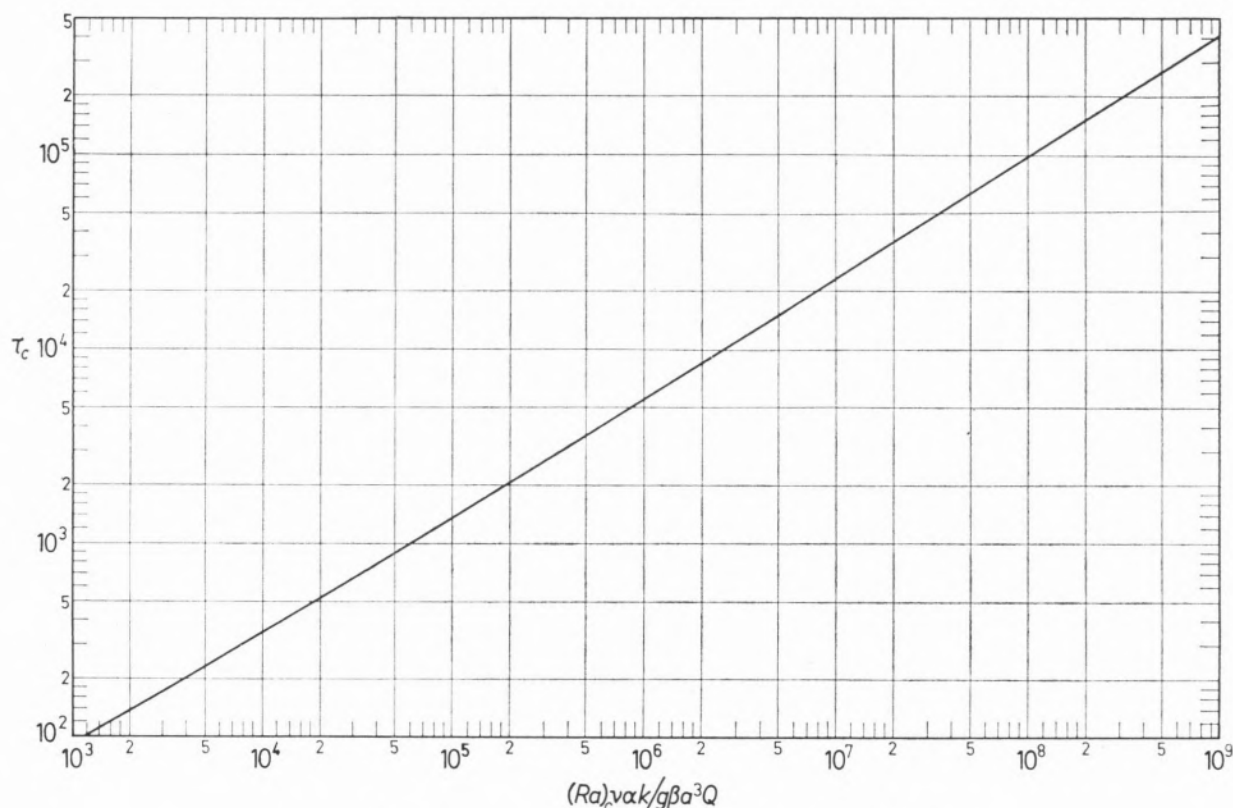


Fig. 4 — Número de Fourier $\tau_c = \alpha t_c / a^2$ no início da convecção livre.

em que o raio da superfície exterior aumenta com o tempo de tal modo que, para uma diferença de temperaturas ΔT entre as paredes igual a T , se obtenha uma quantidade de calor transmitida Q (estando Q e T ligados pela equação 4). Para regime permanente, num espaço compreendido entre cilindros co-axiais de raios exterior e interior b e a respectivamente, temos (3-d):

$$\Delta T = \frac{Q}{2\pi k} \ln \frac{b}{a}$$

Fazendo ΔT igual à subida de temperatura do fio, dada por 4, teremos:

$$\ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{4\tau}{C}$$

donde se tira:

$$b - a = a \left(\sqrt{\frac{4\tau}{C}} - 1 \right)$$

Substituindo em 23 ($R_e - R_i$) por este valor, obtemos a expressão do número de Rayleigh para o regime

pseudopermanente considerado:

$$Ra = \frac{g \beta T a^3}{\nu \alpha} \left(\sqrt{\frac{4\tau}{C}} - 1 \right)^3 \quad (24)$$

VAN DER HELD e VAN DRUNEN (9) publicaram os resultados de ensaios para a determinação deste número de Rayleigh crítico, tendo obtido, para sete líquidos, valores compreendidos entre 785 e 1365, com um valor médio $Ra_c = 1070$. Este número foi confirmado, aproximadamente, por HORROCKS e McLAUGHLIN (10). Podemos, assim, determinar o tempo t_c , a partir do qual se manifesta a convecção, resolvendo a equação que se obtém substituindo 4 em 24, com $Ra = Ra_c$:

$$Ra_c = \frac{g \beta a^3}{\nu \alpha} \frac{Q}{4\pi k} \left(\sqrt{\frac{4\tau_c}{C}} - 1 \right)^3 \ln \frac{4\tau_c}{C} \quad (25)$$

Esta equação está representada graficamente na fig. 4.

3.7 — INFLUÊNCIA DA EXISTÊNCIA DUMA PELÍCULA ISOLADORA — Se o líquido a ensaiar tiver uma condutibilidade eléctrica apreciável, pode haver necessidade de revestir o fio metálico com uma película isoladora.

Se for $\delta = a' - a$ a espessura da película e k' a sua condutibilidade térmica, a temperatura do fio passará a ser dada por (11):

$$T(t) = \frac{Q}{4\pi k} \left[2 \ln \frac{a'}{a} \left(\frac{k}{k'} - 1 \right) + \ln \frac{4\tau}{C} + \dots \right] \quad (26)$$

em que os restantes termos da série são da mesma ordem de grandeza que a dos que desprezamos ao passar de 3 para 4. Verifica-se, assim, que a influência do revestimento se traduz pelo aparecimento na expressão de $T(t)$ dum termo aditivo constante, que não altera a inclinação da curva da temperatura em função de $\ln t$.

No caso em que se verifique apenas uma resistência à passagem de calor na superfície de contacto do fio com o líquido, a temperatura do fio será dada por (3-a):

$$T(t) = \frac{Q}{4\pi k} \left[\frac{2k}{aH} + \ln \frac{4\tau}{C} + \dots \right] \quad (27)$$

em que $1/H$ é a resistência térmica por unidade de área. Tal como no caso anterior, a influência desta traduz-se pelo aparecimento dum termo aditivo constante.

3.8 — *OUTRAS CAUSAS DE ERROS* — Além das causas que citámos e que estão ligadas ao método na sua forma mais geral, existem outras causas de erros sistemáticos que dependem do dispositivo utilizado e devem ser estudadas para cada caso particular. Entre elas, deve citar-se que, se a resistência eléctrica do fio variar com a sua temperatura — o que em geral sucede —, varia também a quantidade de calor libertado pelo efeito de Joule.

4 — REALIZAÇÕES EXPERIMENTAIS

4.1 — A primeira aplicação experimental do princípio do fio aquecido em regime transitório parece ter sido realizada por STALHANE e PYK (12), que, anteriormente à dedução por via teórica, descobriram empiricamente a lei da variação da temperatura do fio com a forma:

$$T(t) = A \frac{Q}{k} \left(\log \frac{t}{a^2} + B \right)$$

sendo A e B constantes.

Os fundamentos teóricos do método foram apresentados posteriormente por PFRIEM (13), que indicou a possibilidade da sua utilização para determinações da condutibilidade térmica. A partir dessas bases foram construídos vários aparelhos, que podemos classificar em vários grupos, conforme o transdutor utilizado para medir a temperatura.

4.2 — No primeiro grupo, no qual está incluída a maioria dos autores (10, 14 a 25), o próprio fio é usado como termómetro de resistência. A medição é, em geral, feita com o auxílio duma ponte: é registada, em função do tempo, a tensão de desequilíbrio, que é proporcional à variação da resistência e à subida de temperatura do fio (trata-se de pequenas variações).

4.3 — Nos métodos incluídos no segundo grupo, a medição da temperatura é realizada por intermédio dum termo-par.

No aparelho utilizado por VAN DER HELD e VAN DRUNEN (9) e posteriormente aperfeiçoado (26, 27), o fio aquecido — de manganina, para que a resistência não varie com a temperatura — e o fio do termo-par estão colocados paralelamente no interior dum tubo de vidro de pequeno diâmetro. Neste caso os circuitos eléctricos de aquecimento do fio e de medição da temperatura são distintos.

HILL (28) construiu um aparelho em que o termo-par é formado pelo próprio fio aquecido, que é constituído por dois segmentos de ligas metálicas (Pt-Ag e Pt-Ru) com potenciais termoeléctricos diferentes, mas com resistividades eléctricas e propriedades térmicas sensivelmente iguais. O aquecimento do fio é realizado por uma corrente alternada de alta frequência, sendo deste modo possível efectuar a medição da f. e. m. do par utilizando um filtro. O método de Hill constitui uma variante do que descrevemos, pois, sendo o tempo de ensaio muito curto (20,7 e 62,1 milissegundos), a equação 4 não é aplicável e torna-se necessário utilizar a solução completa da equação diferencial e, por isso, conhecer previamente as propriedades c , ρ , c_1 , ρ_1 do material do fio e do meio a estudar.

4.4 — Um processo óptico de medição da temperatura foi apresentado por LAMM (28) e aperfeiçoado por BRYNGDAHL (29) e baseia-se na variação do índice de refração do líquido com a temperatura: é medido o desvio dos raios luminosos que o atravessam, enquanto o fio é aquecido. Este método é aplicável apenas

a meios suficientemente transparentes e necessita do conhecimento prévio do coeficiente de variação do índice de refração com a temperatura.

4.5 — A utilização do fio como termómetro de resistência tem a vantagem de utilizar um único fio e aparelhagem relativamente simples. No entanto, este método apresenta, em relação ao de VAN DER HELD e VAN DRUNEN, vários inconvenientes. Em primeiro lugar, como o material do fio tem de ter uma resistividade eléctrica fortemente variável com a temperatura (a quase totalidade dos autores utilizou fios de platina), sucede que a quantidade de calor libertado Q não se mantém rigorosamente constante quando a temperatura do fio sobe, a não ser que se utilize um circuito eléctrico que assegure a constância de Q , como foi realizado por ALLEN (18). Em segundo lugar, para que sejam reduzidos os efeitos das extremidades (§ 3.4), o fio tem de ter um comprimento considerável (em geral de 8 a 20 cm), o que não sucede com o caso do termo-par, em que a temperatura é medida num ponto suficientemente afastado dos extremos (comparem-se, nos §§ 3.4.1 e 3.4.2, as expressões de e_3 e e_4 com as de e'_3 e e'_4). Em terceiro lugar, quando se utiliza um fio nu, a medição da temperatura por variação de resistência é perturbada, em muitos líquidos, por fenómenos electroquímicos.

Para reduzir os inconvenientes apontados em segundo lugar, alguns autores — EUCKEN e ENGLERT (14), GILLAM *et al.* (12, 13), HORROCKS e McLAUGHLIN (10), BRYNGDAHL (24) — utilizaram apenas uma parte central do fio aquecido para medir a temperatura, tendo para isso soldado àquele, em pontos suficientemente afastados das extremidades, fios que limitam a zona útil da fonte de calor e que servem de ligação à aparelhagem de medição da variação de resistência.

4.6 — O diâmetro do fio deve ser tão pequeno quanto o permitam a construção e o manejo do aparelho, para que sejam reduzidos os erros referidos nos §§ 3.1, 3.3, 3.4.2 e 3.6. Os diâmetros escolhidos pela maioria dos autores estão compreendidos entre 0,01 e 0,1 mm.

4.7 — Em alguns dos aparelhos construídos foi utilizado um galvanómetro para a medição da temperatura, sendo o registo em função do tempo feito por um quimógrafo (14) ou por processos fotográficos (9, 11, 12, 13, 26, 27). O emprego de um galvanómetro, devido aos atritos e, principalmente, à inércia da parte

móvel — em geral trata-se de aparelhos de grande sensibilidade e com tempos de resposta relativamente grandes —, intruz erros consideráveis na medição de grandezas variáveis com o tempo. Estes erros podem, em parte, ser corrigidos, desde que se estude o comportamento dinâmico do galvanómetro, como foi feito por VAN DER HELD e VAN DRUNEN (9) e GILLAM *et al.* (16).

Para evitar estes inconvenientes, mais recentemente foram utilizados aparelhos registadores electrónicos (10, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25).

4.8 — Um método comparativo foi apresentado por GRASSMANN, STRAUMANN *et al.* (19, 21, 22, 23), em que se utilizam dois fios aquecidos, estando um mergulhado no líquido a estudar e o outro num meio que serve de padrão. Cada um dos fios faz parte duma ponte de Wheatstone e as tensões de desequilíbrio das duas pontes — proporcionais às subidas de temperaturas dos fios — são registadas simultaneamente uma em função da outra, obtendo-se uma recta cujo coeficiente angular permite calcular a relação entre as duas condutibilidades térmicas. Por este processo consegue-se uma compensação parcial de alguns erros sistemáticos, como sucede em geral com os métodos comparativos.

APÊNDICE A

Consideremos o fio como uma fonte linear de comprimento L envolvido por um meio ilimitado em todas as direcções e seja $T_L(t, r, z)$ a temperatura num ponto (r, z) no instante t . VAN DER HELD e VAN DRUNEN (9) obtiveram para a derivada da temperatura em ordem a $\ln t$ a seguinte expressão:

$$i_L(t, r, z) = \frac{dT_L(t, r, z)}{d(\ln t)} = t \frac{\partial T_L(t, r, z)}{\partial t} = \frac{Q e^{-r^2/4\alpha t}}{8\pi k} \left[\operatorname{erf} \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{4\alpha t}} + \operatorname{erf} \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{4\alpha t}} \right] \quad (\text{A-1})$$

em que $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$ é a função de erro.

Fazendo $r = a$ em A-1 (veja-se o que se disse no final do § 2.1), obtemos a expressão da inclinação da curva da temperatura do fio em função de $\ln t$, válida para

valores elevados de $\tau = \alpha t/a^2$ e que representamos por $i_L(t, z)$:

$$i_L(t, z) = i_L(t, a, z) = \frac{Q e^{-a^2/4\alpha t}}{8\pi k} \left[\operatorname{erf} \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{4\alpha t}} + \operatorname{erf} \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{4\alpha t}} \right] \quad (\text{A-2})$$

Na expressão anterior, o termo entre parêntesis recto representa a influência do comprimento finito do fio. Com efeito, fazendo $L = \infty$ em A-2, fica simplesmente $i_\infty(t) = Q \exp(-a^2/4\alpha t)/4\pi k$, que é a expressão que se obtém derivando 5 em ordem a $\ln t$ e fazendo $r = a$ e que, para valores elevados de τ — que é o caso que nos interessa —, se pode substituir por $Q/4\pi k$. Podemos assim escrever mais simplesmente, pondo $i_\infty = i = Q/4\pi k$:

$$i_L(t, z) = \frac{Q}{8\pi k} \left[\operatorname{erf} \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{4\alpha t}} + \operatorname{erf} \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{4\alpha t}} \right] \quad (\text{A3})$$

O valor médio de $i_L(t, z)$, ao longo de todo o comprimento do fio, no instante t , será dado por:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} i_L(t, z) dz = \\ &= \frac{Q}{8\pi k L} \int_{-L/2}^{L/2} \left[\operatorname{erf} \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{4\alpha t}} + \operatorname{erf} \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{4\alpha t}} \right] dz \end{aligned}$$

ou, fazendo uma mudança de variável:

$$i_L(t) = \frac{Q}{4\pi k L} \sqrt{4\alpha t} \int_0^{L/\sqrt{4\alpha t}} \operatorname{erf} y dy$$

$$\begin{aligned} \text{Mas} \quad \int_0^x \operatorname{erfc} y dy &= x - \int_0^x \operatorname{erfc} y dy = x - \\ &- \int_0^\infty \operatorname{erfc} y dy + \int_x^\infty \operatorname{erfc} y dy \\ &= x - \operatorname{ierfc} \infty - \operatorname{ierfc} x = x - \operatorname{ierfc} x \end{aligned}$$

em que $\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$ é a função complementar de erro e $\operatorname{ierfc} x$ é a função integral da função com-

plementar de erro, definida como sendo:

$$\operatorname{ierfc} x = \int_x^\infty \operatorname{erfc} y dy$$

Teremos finalmente:

$$i_L(t) = \frac{Q}{4\pi k} \left[1 - \frac{\sqrt{4\alpha t}}{L} \operatorname{ierfc} \frac{L}{\sqrt{4\alpha t}} \right] \quad (\text{A-4})$$

APÊNDICE B

Consideremos um fio de comprimento L e raio a , com condutibilidade térmica k_1 . Vamos supor que a temperatura não varia com o raio em cada secção recta do fio (hipótese válida para $k_1 \gg k$) e que as extremidades do fio são mantidas a temperatura constante: $T_L(t, \pm L/2) = T_L(0, \pm L/2) = 0$. Teremos, para um troço de fio compreendido entre as secções z e $z + dz$:

$$Q dz = h T 2\pi a dz + \rho_1 c_1 \pi a^2 dz \frac{\partial T_L}{\partial t} - k_1 \pi a^2 \frac{\partial^2 T_L}{\partial z^2} dz$$

em que, no segundo membro, os três termos representam respectivamente o calor perdido para o exterior, o calor acumulado e o calor transmitido ao longo do fio (por unidade de tempo). h é o coeficiente de transmissão de calor na superfície do fio. A equação anterior pode escrever-se:

$$k_1 \pi a^2 \frac{\partial^2 T_L}{\partial z^2} - \rho_1 c_1 \pi a^2 \frac{\partial T_L}{\partial t} - 2\pi a h T_L + Q = 0 \quad (\text{B-1})$$

A integração desta equação diferencial foi apresentada por ALLEN (14) para as condições aos limites $T_L(t, \pm L/2) = 0$, com a hipótese simplificativa de desprezar a variação de h com t e z . A solução tem a forma duma série.

Se desprezarmos a capacidade calorífica do fio, a equação anterior fica reduzida a:

$$k_1 \pi a^2 \frac{\partial^2 T_L}{\partial z^2} - 2\pi a h T_L + Q = 0 \quad (\text{B-2})$$

Se admitirmos que h não varia com z , esta equação integra-se facilmente, obtendo-se, com as condições aos limites $T_L = 0$ para $z = \pm L/2$:

$$T(t, z) = \frac{Q}{2\pi a h} \left[1 - \frac{ch \frac{2z}{L} u}{ch u} \right] \quad (\text{B-3})$$

sendo

$$u = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{2h}{k_1 a}} \quad (\text{B-4})$$

Na equação (B-3) vê-se facilmente que é:

$$\frac{Q}{2\pi a h} = T(t) \simeq \frac{Q}{4\pi k} \ln \frac{4\tau}{C} \quad (\text{B-5})$$

sendo $T(t)$ a temperatura do fio de comprimento infinito, dada por (4); com efeito, fazendo em (B-3) $L = \infty$, o segundo termo do parêntesis anula-se. Teremos, portanto:

$$T_L(t, z) = T(t) \left[1 - \frac{ch \frac{2z}{L} u}{ch u} \right] \quad (\text{B-6})$$

De (B-5) tiramos o valor de h :

$$h = \frac{2k}{a} \frac{1}{\ln \frac{4\tau}{C}}$$

que, substituído em (B-4), permite obter:

$$u = \frac{L}{a} \sqrt{\frac{k}{k_1}} \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{4\tau}{C}}} \quad (\text{B-7})$$

O valor médio da temperatura ao longo de todo o fio é:

$$T_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} T_L(t, z) dz = T(t) \left[1 - \frac{th u}{u} \right] \quad (\text{B-8})$$

5 — CONCLUSÃO

Um número considerável de investigadores ocupou-se do método cujos fundamentos apresentámos e os problemas teóricos que ele levanta estão hoje quase total-

mente resolvidos. Do que se disse atrás e do estudo da bibliografia citada, pode concluir-se que, desde que se disponha duma boa aparelhagem de registo, o método permite obter resultados com uma precisão comparável à que se consegue com os melhores métodos estacionários, com a vantagem de utilizar uma célula de construção muito mais simples e um tempo de ensaio consideravelmente mais curto.

SIMBOLOGIA

a	raio do fio
c	calor específico a pressão constante
$C = 1,7881\dots = e^{\gamma}$	constante matemática
e	base dos logaritmos naturais;
	erro relativo (com índice)
g	aceleração da gravidade.
$i = \frac{dT}{d(\ln t)}$	inclinação da curva de T em função de $\ln t$
k	condutibilidade térmica.
L	comprimento do fio.
Q	quantidade de calor libertado por unidade de comprimento e por unidade de tempo.
r	raio.
R	raio interior do recipiente
Ra	número de Rayleigh
t	tempo.
$T = \theta - \theta_0$	subida de temperatura.
u	variável dada por 16.
z	coordenada paralela ao eixo do fio.
$\alpha = k/\rho c$	difusividade térmica
β	coeficiente de dilatação volumétrico.
$\gamma = 0,5772\dots = \ln C$	constante de Euler.
ε	emissividade total de radiação

θ	temperatura absoluta
ν	viscosidade cinemática.
ρ	massa específica.
σ	constante de Stefan-Boltzmann
$\tau = \alpha t/a^2$	número de Fourier.

ÍNDICES

sem índice (α , ρ , c , k) propriedades físicas do meio envolvente.

1 (ρ_1 , c_1 , k_1) propriedades físicas do material do fio.

c refere-se ao início da convecção livre.

L refere-se a um fio de comprimento finito L .

BIBLIOGRAFIA

1. Tait, R. W. F. e Hills, B. A., *Ind. Eng. Chem.*, **56**, 29 (1964).
2. McLaughlin, E., *Chem. Rev.*, **64**, 389 (1964).
- 3a. Carslaw, H. S. e Jaeger, J. C., «Conduction of Heat in Solids», 2.^a ed., Oxford University Press, 1959, pp. 344, 345.
- 3b. Carslaw, H. S. e Jaeger, J. C., «Conduction of Heat in Solids», 2.^a ed., Oxford University Press, 1959, p. 261.
- 3c. Carslaw, H. S. e Jaeger, J. C., «Conduction of Heat in Solids», 2.^a ed., Oxford University Press, 1959, p. 191.
- 3d. Carslaw, H. S. e Jaeger, J. C., «Conduction of Heat in Solids», 2.^a ed., Oxford University Press, 1959, p. 189.
4. Fischer, J., *Ann. Physik*, **34**, 669 (1939).
5. Blackwell, J. H., *Can. J. Phys.*, **31**, 472 (1953).
6. Hsu, S. T., «Engineering Heat Transfer», D. Van Nostrand, Princeton, 1963, p. 146.
7. Gröber, H., Erk, S. e Grigull, U., «Fundamentals of Heat Transfer», McGraw-Hill, New York, 1961, pp. 313-317.
8. Kraussold, H., *Forsch. Gebiete Ingenieurw.*, **5**, 186 (1934).
9. Van der Held, E. F. M. e Van Drunen, F. G., *Physica*, **15**, 865 (1949).
10. Horrocks, J. K. e McLaughlin, E., *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A273**, 259 (1963).
11. Falcão, A. F. O., *Técnica*, **28**, 409 (1963).
12. Stalhane, B. e Pyk, S., *Tek. Tidskr.*, **61**, 389 (1931).
13. Pfriem, H., *Z. Ver. Deut. Ing.*, **82**, 71 (1938).
14. Eucken, A. e Englert, H., *Z. Ges. Kältind.*, **45**, 109 (1938).
15. Weishaupt, J., *Forsch. Gebiete Ingenieurw.*, **11**, 20 (1940).
16. Gillam, D. G. et al., *Acta Chem. Scand.*, **9**, 641 (1955).
17. Gillam, D. G. e Lamm, O., *Acta Chem. Scand.*, **9**, 657 (1955).
18. Allen, P. H. G., in «Thermodynamic and Transport Properties of Gases, Liquids and Solids», The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1959, pp. 350-357.
19. Grassmann, P. e Straumann, W., *Intern. J. Heat Mass Transfer*, **1**, 50 (1960).
20. Turnbull, A. G., *Australian J. Appl. Sci.*, **12**, 30 (1961).
21. Straumann, W., *Schweiz. Arch. Angew. Wiss. Tech.*, **27**, 290 (1961).
22. Grassmann, P. et al., in «Progress in International Research on Thermodynamic and Transport Properties», The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1962, pp. 447-453.
23. Widmer, F., *Kältetechnik*, **14**, 38 (1962).
24. Bryngdahl, O., *Z. Angew. Phys.*, **16**, 258 (1963).
25. Jobst, W., *Intern. J. Heat Mass Transfer*, **7**, 725 (1964).
26. Van der Held, E. F. M., Hardbol, J. e Karlshoven, J., *Physica*, **19**, 208 (1953).
27. Vos, B. H., *Appl. Sci. Res.*, **A5**, 425 (1956).
28. Hill, R. A. W., *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A239**, 476 (1957).
29. Lamm, O., *Acta Chem. Scand.*, **14**, 969 (1960).
30. Bryngdahl, O., *Arkiv Fysik*, **21**, 289 (1962).

AGRADECIMENTO

O autor agradece ao Prof. Eng.^o António G. Portela o interesse com que acompanhou este trabalho e ao Instituto de Alta Cultura a concessão duma bolsa de estudo que tornou possível a sua realização.

SUMMARY

The theory of the well known transient hot wire method is presented and the influence of several error sources is studied: wire heat capacity and thermal conductivity, finite dimensions of the system in the axial and radial directions, radiation, free convection and interfacial thermal resistance. The apparatus based on the method are reviewed and compared.